Apuntes

TANGENCIAS.

Problemas de tangencias: rectas tangentes a circunferencias y circunferencias entre sí, conociendo el radio. Aplicación del eje y centro radical en problemas de tangencias: recta y circunferencia con punto de tangencia en esta; y por último, trazar las posibles circunferencias tangentes a dos dadas, en un punto cualquiera de ellas.

CONSIDERACIONES SOBRE TANGENCIAS:

En general, las tangencias tienen por objeto unir circunferencias y rectas mediante otras circunferencias y rectas.

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto O, llamado centro. Esta distancia es el radio de la circunferencia.

Todo radio perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales, así como también el arco que ésta subtiende, de donde se deduce que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro.

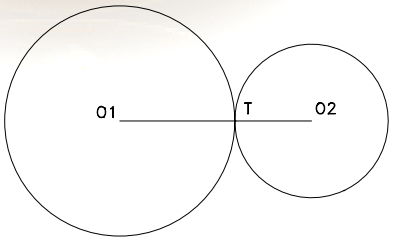


Fig. 1

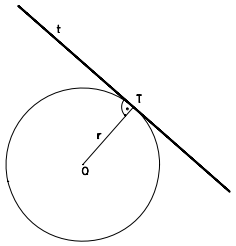


Fig. 2

Las tangencias se fundan en las propiedades siguientes:

1º. Si dos circunferencias son tangentes, el punto de tangencia T está en la línea de centros. (Fig. 1).

2º. Si una recta es tangente a una circunferencia, el punto de tangencia T es el pie de la perpendicular trazada por el centro O a la recta tangente. (Fig. 2).

RECTA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA EN UN PUNTO T :

La tangente t en un punto T a una circunferencia es la perpendicular al radio OT. (Fig. 3).

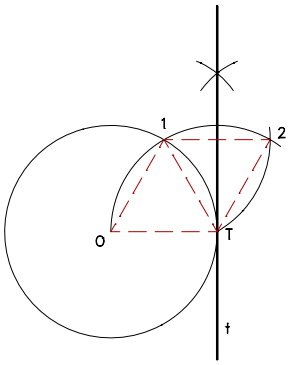


Fig. 3

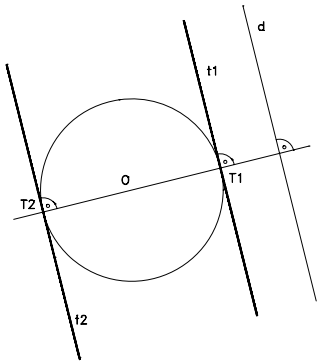


Fig. 4

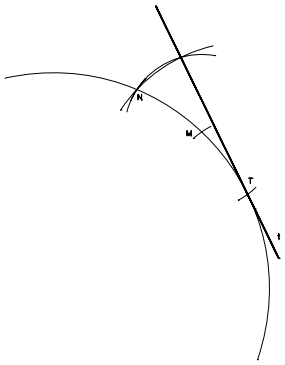


Fig. 5

RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA PARALELAS A UNA DIRECCION DADA:

Sea la dirección d. Por el centro O se traza la perpendicular a la dirección d, la cual corta la circunferencia en los puntos T_1 y T_2 de tangencia; por estos puntos se trazan las tangentes t_1 y t_2 paralelas a d. (Fig. 4).

TRAZADO DE LA TANGENTE A UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA EN UN PUNTO T DE ELLA, NO CONOCIENDO EL CENTRO DEL ARCO:

Se toman dos arcos iguales TM y TN; con centro en T y radio TM se traza un arco y con centro en M y radio MN se traza otro arco; estos dos arcos se cortan en un punto que unimos al punto T , siendo esta la recta tangente buscada. (Fig. 5).

RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA DESDE UN PUNTO EXTERIOR P:

Primer procedimiento: (Fig. 6).

Se une el punto exterior P con el centro O y se traza la circunferencia de radio O-P, la cual corta en T_1 y T_2 a la dada. Las tangentes t_1 y t_2 son las rectas PT_1 y PT_2.

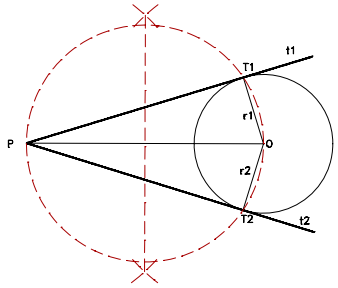


Fig. 6

Segundo procedimiento: (Fig. 7).

Desde el punto P se trazan dos secantes cualesquiera a la circunferencia; se unen los puntos A, B, C y D como indica la figura, obteniendo los puntos 1 y 2; la recta 1-2 corta la circunferencia en los puntos de tangencia T_1 y T_2.

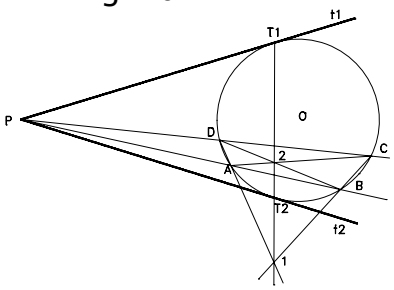


Fig. 7

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA s, QUE PASAN POR UN PUNTO P Y QUE TIENEN UN RADIO r DADO:

Los centros de las soluciones han de equidistar de la recta s y del punto P; por esto, se traza la paralela a la recta s a la distancia r y la circunferencia de centro P y radio r; los puntos de intersección de ambas, O_1 y O_2 son los centros de las soluciones, cuyos puntos de tangencia con s son T_1 y T_2. (Fig. 8).

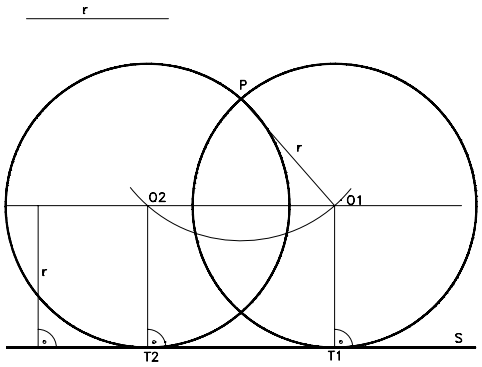


Fig. 8

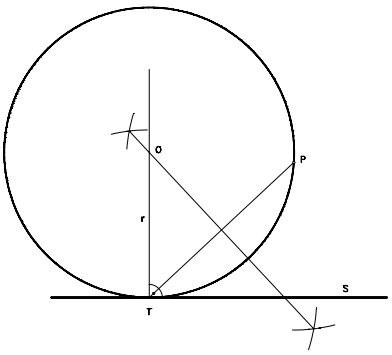


Fig. 9

CIRCUNFERENCIA TANGENTE A UNA RECTA s EN UN PUNTO T DE ELLA Y QUE PASA POR UN PUNTO EXTERIOR P:

El centro O estará en la perpendicular a la recta s por P y en la mediatriz del segmento T-P. (Fig. 9).

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA r EN UN PUNTO T DE ELLA, CONOCIDO EL RADIO r DE LAS SOLUCIONES:

Sobre la perpendicular a la recta r por T, se toma el radio r en los dos sentidos, teniendo así los puntos O_1 y O_2, centros de las soluciones. (Fig. 10).

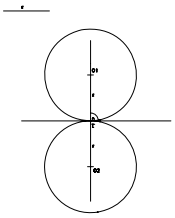


Fig. 10

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A OTRA, DADO EL PUNTO DE TANGENCIA T Y EL RADIO DE LAS SOLUCIONES:

Sobre la recta O-T, prolongada, se toma el radio a partir de T y se obtienen los centros O_1 y O_2 de las soluciones. (Fig. 11).

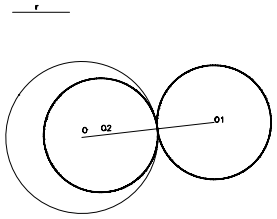


Fig. 11

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS RECTAS r Y s QUE SE CORTAN, CONOCIENDO EL RADIO DE LAS SOLUCIONES:

Se trazan rectas paralelas a las dadas a una distancia igual al radio r, las cuales se cortan en los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4, centros de las soluciones. (Fig. 12).

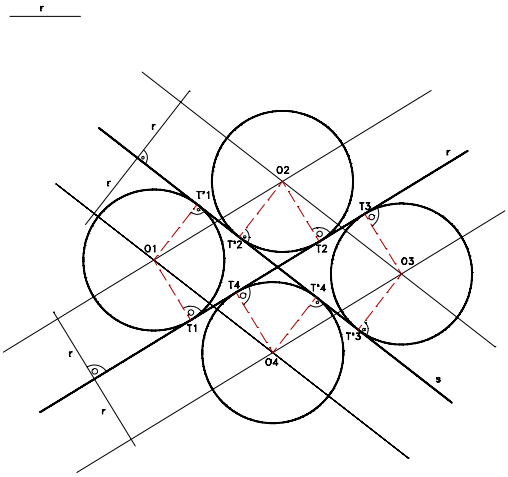


Fig. 12

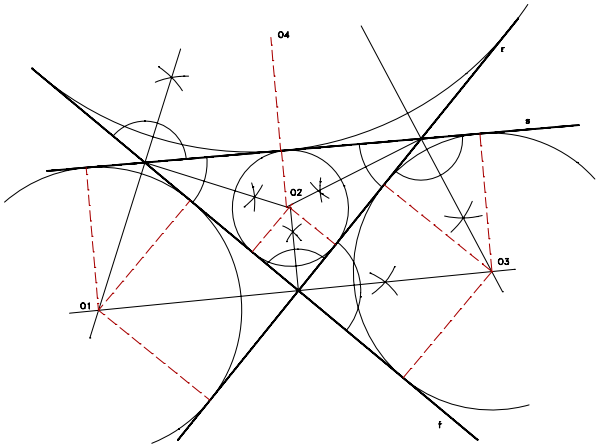


Fig. 13

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A TRES RECTAS QUE SE CORTAN DOS A DOS:

Las circunferencias pedidas son la inscrita y las exinscritas al triángulo que forman las tres rectas. Sus centros son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores y exteriores del triángulo. (Fig. 13).

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS RECTAS r Y s, DADO EL PUNTO DE TANGENCIA T EN UNA DE ELLAS:

Los centros O1 y O2 son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos que forman r y s con la perpendicular a la recta r en el punto T. (Fig. 14).

RECTAS TANGENTES COMUNES EXTERIORES A DOS CIRCUNFERENCIAS:

Las circunferencias dadas, de centros O_1 y O_2, tienen de radios r_1 y r_2 respectivamente. Con centro en O_2 se traza la de radio r_2-r_1 y desde O_1 se trazan las tangentes a ella, rectas t'_1 y t'_2; las rectas paralelas a ellas son las soluciones; los puntos de tangencia T_1, T'_1, T_2 y T'_2 se obtienen trazando por O_1 y O_2 las perpendiculares a las tangentes auxiliares. (Fig. 15).

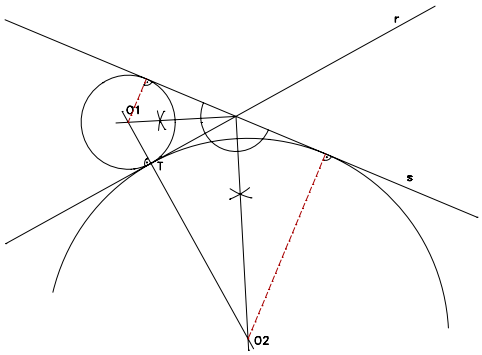


Fig. 14

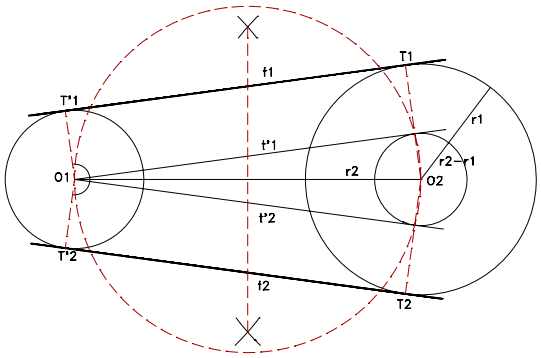


Fig. 15

RECTAS TANGENTES COMUNES INTERIORES A DOS CIRCUNFERENCIAS:

Este problema se resuelve como el caso anterior Fig. 15, pero trazando con centro en O la circunferencia auxiliar de radio R + r.

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA r Y QUE PASAN POR DOS PUNTOS EXTERIORES P Y Q:

Los centros estarán en la mediatriz P-Q. Se prolonga el segmento P-Q y tenemos en la recta r el punto M que es el centro radical de las circunferencias que tengan el centro en la mediatriz. Según esto, se traza una circunferencia auxiliar cualquiera, y desde M se traza la tangente, M-T_0; con centro en M y radio M-T_0 se corta a la recta r en los punto T_1 y T_2 que son los puntos de tangencia en la recta r; trazando perpendiculares a r por ellos, se obtienen los centros O_1 y O_2 de las soluciones. Los puntos P y Q han de estar en el mismo semiplano.

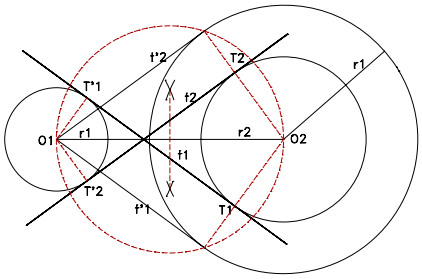


Fig. 16

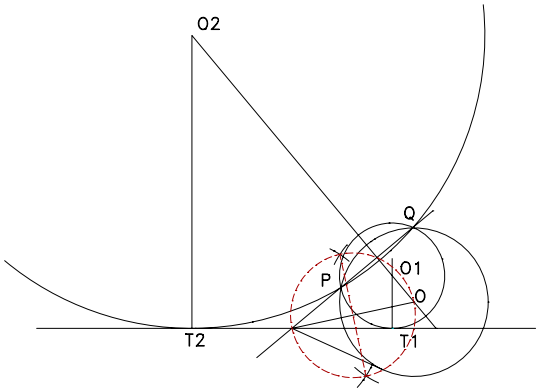


Fig. 17

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A DOS RECTAS r Y s QUE SE CORTAN Y QUE PASEN POR UN PUNTO P DADO:

Las circunferencias soluciones han de pasar por el punto P y por el P', simétrico del P respecto de la bisectriz del ángulo que forman las recta r y s. Toma una circunferencia cualquiera cuyo centro O esté en la bisectriz y que pase por P y P'; la recta P-P' corta en el punto C a la recta s, desde C se traza la tangente a la circunferencia auxiliar; con centro en C se lleva la longitud de la tangente sobre la recta s, teniendo los puntos T_1 y T_2 de tangencia de las circunferencias soluciones con la recta s. Las perpendiculares por T_1 y T_2 a s, nos dan los puntos O_1 y O_2 de la bisectriz, centros de las soluciones.

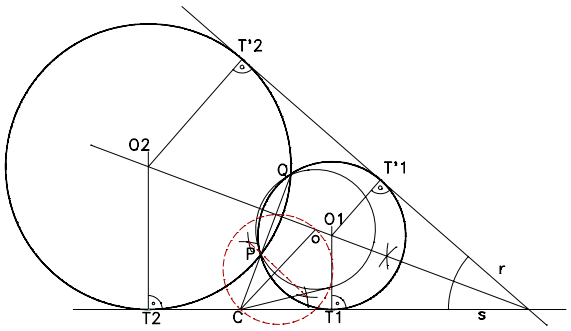


Fig. 18

El punto C tiene la misma potencia respecto de las soluciones y de la auxiliar; es, por tanto, el centro radical. (Fig. 18).

TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS DE RADIO CONOCIDO TANGENTES INTERIORES A OTRAS DOS DADAS:

Con centro en O_1 y O_2 se trazan arcos de circunferencia de radio $r-r_1$ y $r-r_2$ respectivamente, los puntos de corte de estos arcos O_3 y O_4 son los centros de las circunferencias solución, los unimos con O_1 y O_2 para calcular los puntos de tangencia T_3, T'_3, T_4 y T'_4. (Fig. 19).

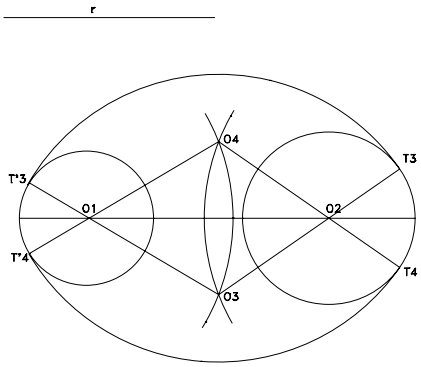


Fig. 19

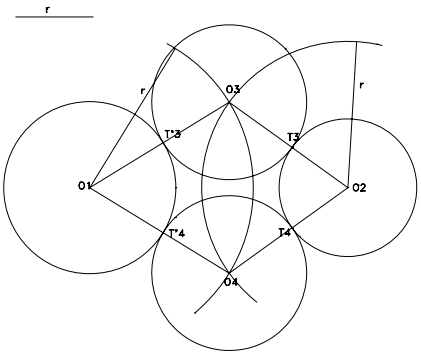


Fig. 20

TRAZADO DE CIRCUNFERENCIAS DE RADIO CONOCIDO

TANGENTES EXTERIORES A OTRAS DOS DADAS:

Se resuelve como el caso anterior pero los arcos de circunferencia trazados desde O_1 y O_2 se harán con un radio de $r+r_1$ y $r+r_2$ respectivamente. (Fig. 20).

CIRCUNFERENCIAS DE RADIO CONOCIDO TANGENTES EXTERIORES A O1 E INTERIORES A O2:

Es una mezcla de los dos ejercicios anteriores. Con centro en O1 se traza un arco de circunferencia de radio r+r1 y desde O2 otro arco de radio r-r2, los puntos de intersección serán los centros de las circunferencias solución. (Fig. 21).

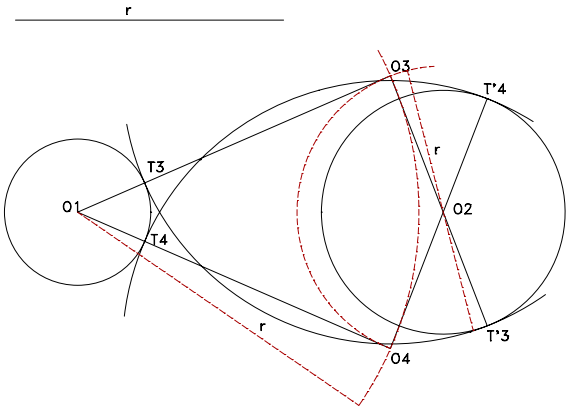


Fig. 21

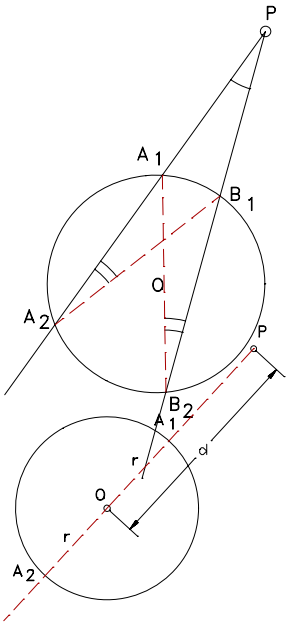
EJE RADICAL.

Eje radical: a dos circunferencias secantes, a dos circunferencias tangentes exteriores e interiores, a dos circunferencias exteriores y excéntricas interiores y centro radical a tres circunferencias.

POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO DE UNA CIRCUNFERENCIA:

Se llama potencia de un punto P respecto de una circunferencia, situados en un mismo plano, al producto de los segmentos determinados por dicho punto y los de intersección con la circunferencia de una secante trazada por P.

$$\text{Potencia} = PA_1 \times PA_2 = PB_1 \times PB_2$$



La propiedad fundamental de la potencia de un punto respecto de una circunferencia es que es independiente de la secante elegida, ya que si se unen los puntos A_1 y B_2, y A_2 y B_1, se forman los triángulos PA_1B_2 y PA_2B_1, que son semejantes, puesto que los ángulos en P coinciden y los ángulos en A_2 y B_2 son iguales por estar inscritos en el mismo arco A_1B_1 (arco capaz).

Comprobada la independencia de la secante elegida, para calcular el valor de la potencia se puede utilizar la que pasa por el centro de la circunferencia. Llamado r al radio y d a la distancia entre el punto P y el centro de la circunferencia, el valor de la potencia viene dado por:

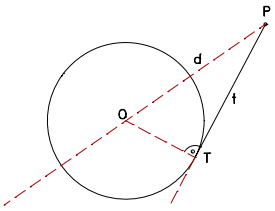
$$\text{Potencia} = d^2 - r^2$$

$$\text{Potencia} = PA_1 \times PA_2 = (d - r) \times (d + r) = d^2 - r^2$$

Para el centro de la propia circunferencia, la potencia es mínima y vale -r, ya que $d^2 = 0$; para los restantes puntos, la potencia crece al aumentar d, pasando por cero para los puntos de la propia circunferencia y llegando a valores infinitos positivos cuando el punto se aleja indefinidamente.

La expresión de la potencia $d^2 - r^2$ indica claramente la posición del punto P respecto de la circunferencia, pues cuando es exterior a ella, $d > r$ y $d^2 - r^2 > 0$, con lo que la potencia es positiva; y cuando es interior, $d < r$ y $d^2 - r^2$

< 0, con lo que la potencia es negativa. Cuando P está sobre la circunferencia, la potencia es nula, d = r y $d^2 - r^2 = 0$.



Cuando el punto P es exterior a la circunferencia la tangente t puede considerarse como la posición límite de una secante, y el punto T como posición límite común de las intersecciones A_1 y A_2; en estas condiciones la potencia es:

$$\text{Potencia} = PA_1 \times PA_2 = PT \times PT = PT^2$$

esto es, el cuadrado del segmento de tangente a la circunferencia trazada desde P y comprendido entre P y el punto de tangencia T.

EJE RADICAL:

Se llama **eje radical** de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos del plano que las contiene que tienen la misma potencia (variable para cada punto) respecto de ambas.

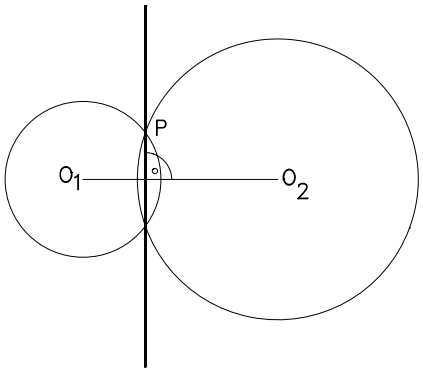
La potencia de P respecto de una de las circunferencias es $(d^2_1 - r^2_1)$, y respecto de la otra $(d^2_2 - r^2_2)$. Como, por definición, éstas han de ser la misma, se tiene:

$d^2_1 - r^2_1 = d^2_2 - r^2_2 = k$.

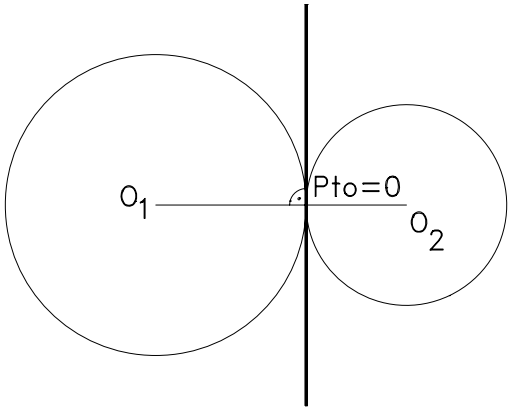
El lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de cuadrados de distancias a otros dos fijos es constante, es una recta perpendicular a la que une los dos puntos fijos, por lo tanto, el eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular a la recta que une los centros.

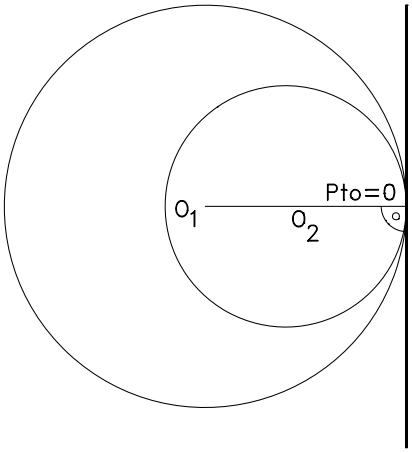
EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS SECANTES:

Los puntos de intersección de las dos circunferencias, tienen la misma potencia respecto de ambas: potencia nula por pertenecer a ellas. Por tanto, basta trazar la recta que los une, que de nuevo resulta perpendicular a la recta de los centros.



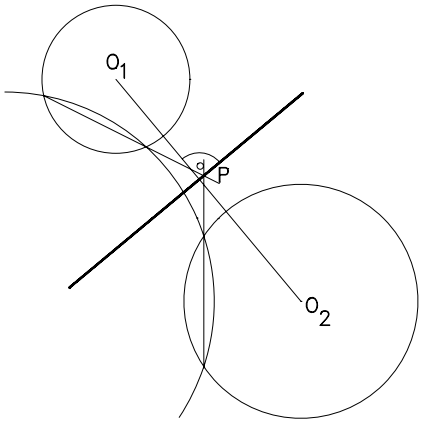
EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS TANGENTES INTERIORES O EXTERIORES:



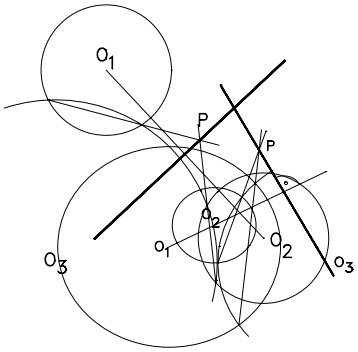


El eje radical es la tangente común a ambas circunferencias, pues cualquier punto de ella, P, tiene la misma potencia respecto de ambas, medida en las dos por el cuadrado de PT. Es perpendicular a la línea de centros, pues es perpendicular a los radios.

EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS EXTERIORES:



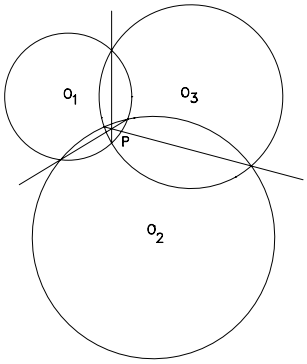
Para trazar el eje radical a dos circunferencias exteriores nos auxiliamos de otra secante a ambas, trazamos el eje radical de esta con cada una de ellas y por el punto de intersección de los dos ejes trazamos una perpendicular a la línea de centros que será el eje radical buscado. Si las circunferencias exteriores tienen el mismo radio, el eje radical será la mediatriz de la línea de centros.



EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS, UNA INTERIOR A OTRA:

Se resuelve igual que el caso anterior trazando una circunferencia auxiliar O_3 que corte a las otras dos.

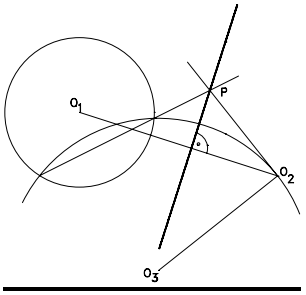
CENTRO RADICAL A TRES CIRCUNFERENCIAS:



El punto O tiene la misma potencia respecto de las tres circunferencias y se llama centro radical y su existencia es general cuando se dan tres circunferencias.

La determinación del centro radical es inmediata. Se trazan dos ejes radicales y se halla su intersección. Naturalmente, el tercer eje pasará por él.

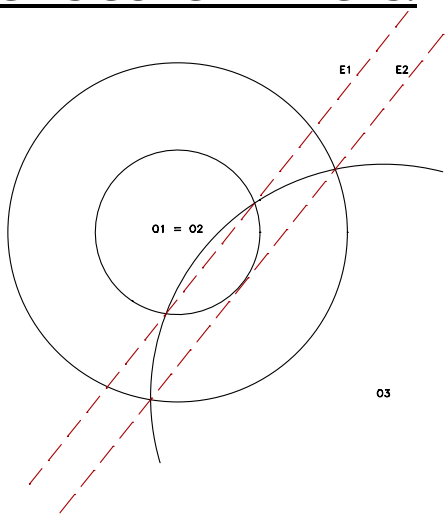
EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS, UNA DE ELLA DE RADIO = 0 (un punto):



Nos auxiliamos de una tercera circunferencia O_3 que pase por O_2 y sea secante a O_1 y calculamos el eje radical de O_3 con O_1 y O_2. El eje radical de las circunferencias O_3 y O_2 se calcula como el de dos circunferencias tangentes exteriores, donde una de ellas tiene radio 0, el eje radical pasará por el punto de tangencia y será perpendicular a la línea de centros. Por el punto de intersección de los dos ejes radicales se traza una perpendicular a la línea de centros de O_1 y O_2.

EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS CONCENTRICAS:

Si dos circunferencias O_1, O_2 son concéntricas y se intenta hallar un punto P de su eje radical utilizando una circunferencia auxiliar O_3, los ejes E_1 y E_2 serán paralelos y su intersección P se aleja hasta el infinito.



Aplicación multimedia sobre Tangencias

Realizada por:

José Antonio Cuadrado Vicente

jcuadr2@palmera.pntic.mec.es